ТЛ «Дважды Два», 25 школа, 9М класс **декабрь 2016 года**

Спецматематика – кружок.

Разбиения натуральных чисел и диаграммы Юнга.

В этом листке собраны теоретические факты и задачи, обсуждавшиеся на занятиях летних школ 2008 и 2009. Практически все задачи были разобраны. Сдавать их не нужно. Они приведены для «освежения памяти» и подготовки к зачету.

Задача 1. На первой доске написано несколько натуральных чисел. На второй доске числа пишутся по следующему принципу: сначала пишется количество всех чисел, потом количество чисел ≥ 2, ≥ 3 и так далее. Точно так же по второй доске определяются числа на третьей доске. Докажите, что на третьей доске написаны те же числа, что и на первой.

Определение 1. *Разбиением* натурального числа n называется набор натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$, таких что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$. При этом наборы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми разбиениями. Обозначается количество таких наборов $p(n)$. По определению считается, что $p(0) = 1$

Упражнение 1. Найдите $p(4)$; $p(5)$.

Задача 2. Докажите, что **а)** $p(n+1) > p(n)$; **б)** $p(n+1) + p(n-1) \geq 2p(n)$.

Задача 3. Докажите, что $p(n)$ равно числу решений уравнения $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$. в целых неотрицательных числах.

Задача 4. Докажите, что число разбиений на слагаемые, не превосходящие s, равно числу разбиений на не более чем s слагаемых.

Задача 5. Докажите, что число разбиений N на не более, чем m слагаемых, равно числу разбиений числа N+ $\dfrac{m(m+1)}{2}$ на m неравных частей.

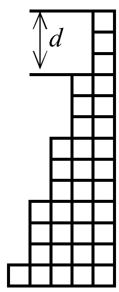
Задача 6. * Докажите, что

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \ldots = (1 + x + x^2 + \ldots)\ldots(1 + x^k + x^{2k} + \ldots)\ldots = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\ldots\ .$$

Задача 7. Докажите, что натуральное число N может быть $2^{N-1} - 1$ различными способами представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся хотя бы порядком слагаемых, считать различными. Например, у числа 4 имеется 7 представлений: 4 =1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 1+3 = 3+1.

Задача 8. Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы *различных* натуральных слагаемых столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы *одинаковых или различных, но нечетных* натуральных слагаемых. Например, все возможные представления числа 6 посредством различных слагаемых будут: 6, 1+5, 2+4, 1+2+3; посредством нечетных: 1+5, 3+3, 1+1+1+3, 1+1+1+1+1+1 .

Также с помощью диаграмм Юнга очень наглядно можно проиллюстрировать арифметическую прогрессию (см.рис.) Здесь изображены первые пять членов прогрессии 1, 4, 7, 10, ...



Задача 9. Пользуясь диаграммами, выведите[1] формулы для суммы первых n членов арифметической прогрессии через:

а) два крайних члена и количество слагаемых;

б) начальный член, количество слагаемых и разность прогрессии.

Симметрические многочлены.

Определение 2. Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *симметричным относительно переменных* x_i и x_j, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Многочлен называется симметричным по всем переменным или *симметрическим*, если его значение не изменяется при любой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

[1] Мы решали эту задачи, когда изучали тему арифметическая прогрессия.

Пусть есть одночлен $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$. В общем случае он не будет симметрическим многочленом. По этому одночлену построим многочлен, симметричный по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, что для этого надо выписать все одночлены, получающиеся из данного всеми возможными перестановками переменных и сложить их. Заметим, что многочлен, получающийся при этом, будет однородным.

Контрольный вопрос 1. Сколько таких перестановок для n переменных?

Контрольный вопрос 2. Какова степень полученного многочлена?

Запишем показатели степеней α_i в порядке убывания[2]: $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.

Определение 3. Набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ назовем *показателем*, а процесс построения симметрического многочлена, соответствующего данному показателю α, – *симметризацией многочлена.*

<u>Пример</u>. Одночлену x^3y^2z от трех переменных соответствует симметрический многочлен

$$P(x) = x^3y^2z + x^2y^3z + x^3yz^2 + x^2yz^3 + xy^2z^3 + xy^3z^2 .$$

Пусть S_n – множество всех возможных перестановок чисел от 1 до n. Поставим в соответствие каждому набору $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ неотрицательных целых чисел однородный симметрический многочлен

$$T_\alpha = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\alpha_{\sigma(1)}} \cdot x_2^{\alpha_{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_{\sigma(n)}} .$$

Обозначим $|\alpha| = \deg T_\alpha$.

<u>Примеры</u>. Набору (3,2,1) соответствует многочлен $T_{321} = \frac{1}{6}\,(x^3y^2z + x^2y^3z + x^3yz^2 + x^2yz^3 + xy^2z^3 + xy^3z^2)$.

Набору $(n,0,\ldots,0)$ – многочлен $T_{n0\ldots0} = \dfrac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{n}$. Набору $(1,1,\ldots,1)$ – многочлен $T_{11\ldots1} = x_1x_2\ldots x_n$

Упражнение 2. Выпишите все перестановки, соответствующие наборам (4,1,0) и (3,1,1).

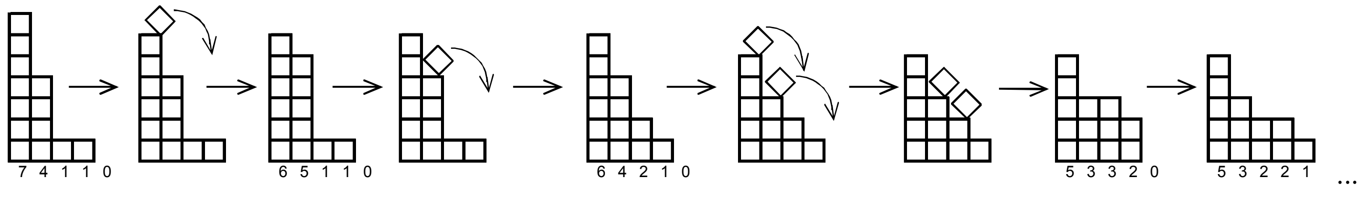
Упражнение 3. Выпишите многочлены T_{410} и T_{311} .

Диаграммы Юнга.

Рассмотрим наборы, соответствующие многочленам от n переменных. Эти наборы можно упорядочить, а именно, будем считать, что набор α больше или равен набору β ($\alpha \geqslant \beta$), если

$$\forall k = 1,\ldots, n \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k. \qquad (*)$$[3]

Поясним, как сравниваются наборы, с помощью диаграмм. Изобразим каждый набор в виде набора из n столбиков. В первом столбике α_1 кубиков, во втором – α_2 и так далее, в последнем – α_n кубиков. Понятно, что полученные "пирамидки" будут расположены по убыванию (невозрастанию) количества кубиков. Тогда из большего набора можно получить меньший путем "скатывания" кубиков из более высокой пирамидки в более низкую. Пример таких "скатываний" изображен на рисунке.



Такие диаграммы называются *диаграммами Юнга*. Заметим, что на нашем рисунке приведены только примеры наборов с одинаковым числом кубиков. Чтобы провести полную аналогию между определением и диаграммами Юнга, разрешим кубикам при "скатывании" исчезать. Тогда, например, из набора (6,5,1,1,0) таким способом можно будет получить набор (5,3,1,1,1).

Задача 10. Докажите, что для наборов α и β соотношение (*) выполняется тогда и только тогда, когда диаграмма Юнга для β получается с помощью "скатывания кубиков" из диаграммы Юнга для α.

[2] Вообще говоря, в порядке невозрастания.

[3] причем $\alpha=\beta$ только если $\forall k$ выполняется равенство, т.е. наборы α и β совпадают.

Контрольный вопрос 3. Какой из наборов больше (3,2,1) или (2,2,2)?

Контрольный вопрос 4. Верно ли, что любые два набора длины n можно сравнить?

Упражнение 4. Сравните, если это возможно, наборы (6,4,3,2,0,0), (5,5,2,2,1,1), (5,3,3,2,1,1), (4,3,2,2,2,2).

Пусть наборы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ таковы, что $|\alpha| = |\beta|$ и $\exists\, i\;\; \alpha_i = \beta_i + 1,\ \alpha_{i+1} = \beta_{i+1} - 1$ и $\forall k \neq i, i+1\;\; \alpha_k = \beta_k$. Т.е. у наборов α и β отличаются на единицу два соседних элемента. На языке диаграмм Юнга это означает, что набор β получен из α путем одного "скатывания кубика" в соседний столбик. Понятно, что $\alpha > \beta$, кроме того, понятно, что если $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, то многочлены $T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно равны.[4] Пусть теперь у наборов α и β отличаются на единицу два элемента, не обязательно соседних. Т.е. набор β получен из α путем "скатывания" одного кубика уже не обязательно в соседний столбик (подумайте, почему это так). Назовем два таких набора *последовательными*.

> ***Лемма 1.*** Пусть наборы α и β таковы, что $|\alpha| = |\beta|$ и $\exists\, i < j\;\; \alpha_i = \beta_i + 1,\ \alpha_j = \beta_j - 1$ и $\forall k \neq i,j\;\; \alpha_k = \beta_k$. Тогда при всех положительных $x_1, x_2, \dots, x_n$, не равных тождественно друг другу, выполняется неравенство $T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) > T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример. Рассмотрим многочлены, соответствующие наборам $\alpha = (6,5,1)$ и $\beta = (6,4,2)$. Вычтем из многочлена T_α многочлен T_β. Получим

$$x^6y^5z + x^5y^6z + x^6yz^5 + x^5yz^6 + xy^5z^6 + xy^6z^5 - x^6y^4z^2 - x^4y^6z^2 - x^6y^2z^4 - x^4y^2z^6 - x^2y^4z^6 - x^2y^6z^4 =$$
$$= (x^6y^5z + x^6yz^5 - x^6y^4z^2 - x^6y^2z^4) + (x^5yz^6 + xy^5z^6 - x^4y^2z^6 - x^2y^4z^6) + (x^5y^6z + xy^6z^5 - x^4y^6z^2 - x^2y^6z^4) =$$
$$= x^6yz\,(y^4 + z^4 - y^3z - yz^3) + xyz^6\,(x^4 + y^4 - x^3y - xy^3) + xy^6z\,(x^4 + z^4 - x^3z - xz^3) =$$
$$= x^6yz\,(y^3 - z^3)(y - z) + xyz^6\,(x^3 - y^3)(x - y) + xy^6z\,(x^3 - z^3)(x - z)$$

Заметим, что выражение $(y^n - z^n)(y - z) \geq 0$ для любых положительных значениях переменных (подумайте, почему). Причем равенство достигается только при равенстве значений переменных. Тем самым мы доказали, что $T_{651} \geqslant T_{642}$.

> ***Лемма 2.*** Пусть наборы α и β таковы, что $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha \geqslant \beta$. Тогда β можно получить из α с помощью нескольких переходов к последовательным наборам.

Неравенство Мюрхеда.

> ***Теорема (неравенство Мюрхеда).*** Неравенство $T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполняется при всех положительных $x_1, x_2, \dots, x_n$ тогда и только тогда, когда $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha \geqslant \beta$, причем равенство достигается лишь в том случае, когда $\alpha = \beta$ или $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Задача 11. ° Для произвольных чисел a, b, c докажите неравенство: $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$.

Задача 12. ° Для произвольных чисел a, b, c докажите неравенство: $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3b + b^3c + c^3a$.

Задача 13. ° Для произвольных чисел x, y, z докажите неравенство: $x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leqslant x^4 + y^4 + z^4$.

Задача 14. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите $ab + bc + ca \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$.

Задача 15. Для любых a, b и c докажите, что выполняется $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$

Задача 16. Для положительных чисел x, y, z докажите $(x+y)(y+z)(x+z) + xyz \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3)$.

Задача 17. $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$;

Задача 18. $x^4(y^2 + y) + y^4(x^2 + x) + xy(x + y) \geq 2(x^3y^2 + x^2y^3 + x^2y^2)$;

---

[4] Заметим, кстати, что если $|\alpha| = |\beta|$ и $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, то многочлены $T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно равны, независимо от того, как связаны друг с другом α и β.

Задача 19. * (Питер 1980) Докажите, что для всех $x, y, z \in [0;1]$ выполнено неравенство
$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz\,(x + y + z) \leqslant 3.$$

Докажите неравенства при всех положительных x, y, z:

Задача 20. $\dfrac{x^8 + y^8 + z^8}{x^3y^3z^3} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}; x, y, z > 0;$

Задача 21. $x + y + z \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2z} + \dfrac{y^2 + z^2}{2x} + \dfrac{z^2 + x^2}{2y} \leq \dfrac{x^3}{yz} + \dfrac{y^3}{zx} + \dfrac{z^3}{xy}$

Задача 22. $\dfrac{1}{(a+b)^2} + \dfrac{1}{(b+c)^2} + \dfrac{1}{(a+c)^2} \geq \dfrac{9}{4(ab+bc+ac)}$

Задача 23. $\dfrac{a^2 - ab}{b+c} + \dfrac{b^2 - bc}{c+a} + \dfrac{c^2 - ca}{a+b} \geq 0.$

Задача 24. Докажите, что если α и β – два набора с одинаковой суммой и при всех $x; y; z \geq 0$ выполняется $T_\alpha(x; y; z) \geq T_\beta(x; y; z)$, то $\alpha \succ \beta$.

(*Указание*. Рассмотрите случаи $x=y=z=t;$ $x=y=t,$ $z=1;$ $x=t,$ $y=z=1$ и сравните степени получившихся многочленов от t.)

Задача 25. (*Неравенство Шура*) При всех положительных x, y, z и любом натуральном p докажите неравенство $x^p(x - y)(x - z) + y^p(y - x)(y - z) + z^p(z - y)(z - x) \geq 0$.

Замечание: вообще говоря, неравенство Шура и следующие два неравенства выполнены для действительных p.

Задача 26. *(Усиление неравенства Шура) При всех положительных x, y, z и любом натуральном $p > 1$ докажите неравенство $x^p(y - z) + y^p(z - x) + z^p(x - y) \geq 0$.

Задача 27. При всех положительных x, y, z и любом натуральном p докажите неравенство $\dfrac{x^p}{y-z} + \dfrac{y^p}{z-x} + \dfrac{z^p}{x-y} \geq 0$.

Дополнительная часть

Полезные неравенства.

а) для произвольных x и y выполняется $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$;

б) для неотрицательных x и y выполняется $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$;

в) для положительных x и y выполняется $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$;

г) для положительных x и y выполняется $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$

д) неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x \geqslant -1$, $n \in N$.

Неравенство о среднем арифметическом, среднем геометрическом и среднем квадратичным для n чисел :

Для любых неотрицательных чисел $a_1,\ldots,a_n$ верно $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

В листке использованы материалы Уральских турниров, Кировских летних школ, а также материалы лекций автора, прочитанных в летних школах. 2008-2009гг

Транс-неравенство

Упражнение. Докажите, что при a, b, c >0 верно неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$.

Задача 13.1. Пусть $x_1>x_2$, $y_1>y_2$. Что больше: $x_1y_1+x_2y_2$ или $x_1y_2+x_2y_1$?

Задача 13.2. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_5$ произвольная перестановка положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Докажите, что $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_5}{b_5} \geqslant 5$. Установите, когда достигается равенство. [6]

> <u>*Транс-неравенство*</u> :
> $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда
> $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geqslant a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$. [7]

Задача 13.3. Докажите транс-неравенство.

Задача 13.4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x} \leq \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$

Задача 13.5. Для произвольных чисел a, b, c докажите неравенство: $a^4+b^4+c^4 \geq a^3b+b^3c+c^3a$.

Задача 13.6. Докажите неравенство $\frac{n}{2^n}+\frac{m}{2^m}+\frac{k}{2^k} \leqslant \frac{m}{2^n}+\frac{k}{2^m}+\frac{n}{2^k}$ для любых натуральных n,m,k.

Задача 13.7. * Докажите, что для неотрицательных a, b, c выполняется

$$a+b+c \geq \frac{a(b+1)}{a+1}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{c(a+1)}{c+1}.$$

Задача 13.8. * Пусть $a \geq b>0$, $\alpha \geq \beta>0$, $\alpha\beta=1$. Докажите, что $a+b \leq \alpha a+\beta b$.

Задача 13.9. * Докажите, что для неотрицательных a, b, c выполнено

$$a+b+c \geq \frac{a(bc+c+1)}{ca+a+1}+\frac{b(ca+a+1)}{ab+b+1}+\frac{c(ab+b+1)}{bc+c+1}.$$

Задача 13.10. * Пусть a, b и c – длины сторон треугольника; α, β и γ – величины противоположных углов. Докажите, что $\alpha a+\beta b+\gamma c \geq \frac{1}{2}(\alpha b+\alpha c+\beta a+\beta c+\gamma a+\gamma b)$.

Задача 13.11. * (*неравенство Чебышева*) Докажите, что для чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ выполнено неравенство $(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \leq n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)$.

Задача 13.12. * Докажите, что для любого набора неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство $\sum_{i<j}\sqrt{a_ia_j} \leq \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Задача 13.13. * Докажите *неравенство Коши-Буняковского-Шварца*: для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$: $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$.

Задача 13.14. * Докажите неравенство

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

---

[6] <u>*Подсказка*</u>. Сравните с упражнением.

[7] Интересно, что справедливость утверждения очевидна, если переформулировать его на "житейский язык": имеются стопки 5-рублевых, 10-тирублевых, 50-тирублевых , 100-рублевых и 500-рублевых купюр. Разрешается из одной стопки взять 1 купюру, из другой – 10, из третьей – 100, из четвертой – 1000, а из оставшейся – 10000 купюр. Спрашивается, из каких стопок сколько купюр надо брать, чтобы взять наибольшую сумму?