

XI Горностайская математическая олимпиада.

Второй тур. 25 марта 2019

1. Даны квадратные трехчлены $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ и $x^2 + ex + f$. Оказалось, что любые два из них имеют общий корень, но все три общего корня не имеют. Докажите, что выполнено ровно два из неравенств

$$\frac{a^2 + c^2 - e^2}{4} > b + d - f,$$

$$\frac{c^2 + e^2 - a^2}{4} > d + f - b,$$

$$\frac{e^2 + a^2 - c^2}{4} > f + b - d.$$

2. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Прямые AP , BP и CP вторично пересекают описанные окружности треугольников PBC , PCA и PAB в точках X , Y и Z соответственно. Докажите, что

$$S_{XBC} + S_{YCA} + S_{ZAB} \geq 3S_{ABC}.$$

3. Дан квадратный торт размера 1×1 и веса 1, однако вес в нём не обязательно распределён равномерно. Известно, что вес любого прямоугольного куска не более чем в 1000 раз превосходит площадь этого куска. Малыш вырезает из торта два квадратных куска со сторонами, параллельными сторонам торта, больший по весу отдаёт Карлсону, а меньший забирает себе (если веса равны, Малыш получает любой из кусков). Остаток торта достаётся собаке. Какой максимальный вес Малыш заведомо может получить из любого торта?

4. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC такой, что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания отмечена точка D так, что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

5. Сколькими способами можно заполнить цифрами клетки квадрата размером 3×3 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма цифр была равна 7, а ненулевые цифры не повторялись?

6. Клетчатую доску $2^m \times 2^m$ разрезали на прямоугольники так, что каждая клетка одной из главных диагоналей образует отдельный прямоугольник разбиения. Найдите наименьшую возможную сумму периметров прямоугольников разбиения.