IX Горностайская Математическая Олимпиада.

Письменный Тур. Решения задач.

Задача 1. *При каком наибольшем натуральном n среднее геометрическое n различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом? (ЕГЭ, 2014)*

Ответ: при $n = 4$.

Решение. *Оценка.* Предположим $n \geq 5$. Пусть среднее геометрическое рассматриваемых чисел равно a. Заметим, что 10! делится на произведение рассматриваемых чисел, т.е. на a^n. Но $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, откуда следует, что число a и вместе с ним все рассматриваемые числа не могут иметь простых делителей, отличных от двойки. Но среди первых 10 натуральных чисел этому условию соответствуют лишь 4 числа: 1, 2, 4 и 8. Противоречие.

Пример. $6 = \sqrt[4]{3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$.

Задача 2. *В языке племени АУ две буквы — «А» и «У». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причем в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке. (И. Богданов)*

Ответ: $2^{14} - 2^7$ слов.

Решение. Все последовательности, состоящие не более чем 13 букв, будем называть *допустимыми*. Последовательности, состоящие не более чем из шести букв, будем называть *короткими*. Допустимые последовательности, не являющиеся короткими, будем называть *длинными*.

Пример. Объявим словами все длинные последовательности. Ясно что конкатенация таких последовательностей будет содержать не менее 14 букв, т.е. не будет допустимой. Тогда общее число слов

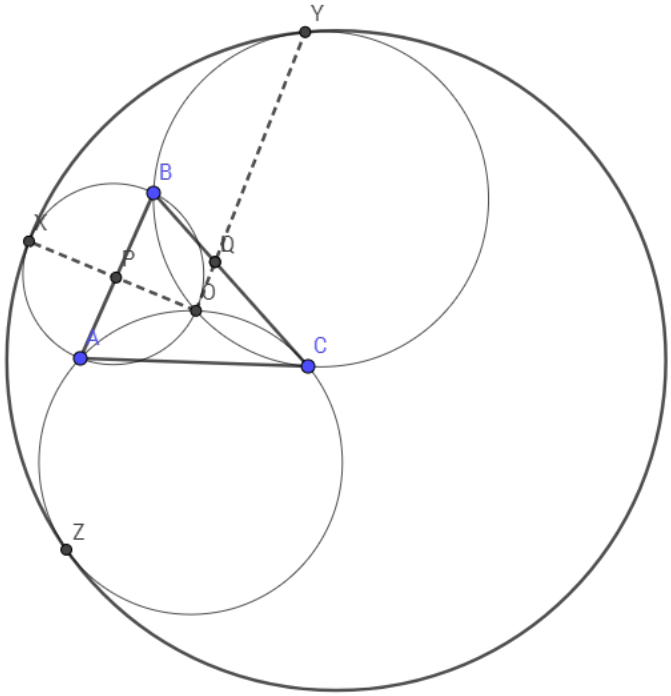
$$2^7 + 2^8 + \ldots + 2^{13} = 2^7(1 + 2 + \ldots + 2^6) = 2^7(2^7 - 1) = 2^{14} - 2^7.$$

Оценка. Теперь предположим, можно так составит словарь АУ, что в нем будет более $2^{14} - 2^7$ слов. Заметим, что общее число допустимых последовательностей не превосходит 2^{14}, и из них ровно 2^7 семибуквенных. Тогда если бы в словаре не было семибуквенных слов, мощность словаря не превосходила бы $2^{14} - 2^7$. Значит, в словаре есть семибуквеное слово ω.

Обозначим общее число коротких последовательностей через N, а число коротких слов — через n. Припишем справа к каждому короткому слову слово ω. Мы получим n длинных последовательностей, не являющихся словами. Также у нас есть $N - n$ коротких последовательностей, не являющихся словами. Значит, общее число последовательностей, не являющихся словами, не может быть меньше N, а тогда общее число слов не превосходит числа длинных последовательностей, которое как мы доказали ранее, равно $2^{14} - 2^7$. **Полученное противоречие завершает решение задачи.**

Задача 3. *Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Описанные окружности треугольников AOB, BOC и COA внутренним образом касаются окружности Ω в точках X, Y и Z соответственно. Прямая OX пересекает сторону AB в точке P, прямая OY пересекает сторону BC в точке Q. Докажите, что $PB = QB$. (Д. Трущин)*

Решение.



Сделаем инверсию относительно описанной окружности треугольника ABC. Точки A, B и C при инверсии переходят сами в себя. Описанные окружности треугольников AOB, BOC и COA проходят через центр инверсии, поэтому переходят в прямые AB, BC и CA соответственно. Тогда точка X переходит в точку P, а точка Y — в точку Q. Остается заметить, что окружность Ω переходит во вписанную окружность треугольника ABC. Отсюда следует, что P и Q — точки касания вписанной окружности со сторонами. Тогда $PB = QB$, **что и требовалось доказать.**

Задача 4. *Вычислите*

$$\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}.$$

(Саратовские математические олимпиады)

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Решение. Заметим, что

$$8\cos\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14} = 4\sin\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14} =$$

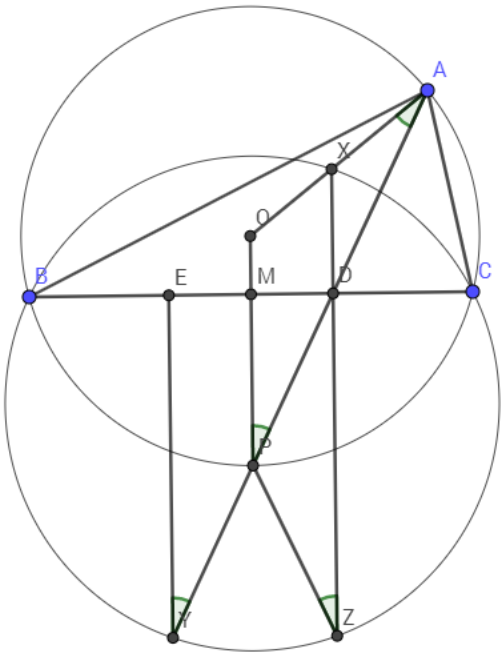
$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{14} - \cos\frac{7\pi}{14}\right)\sin\frac{3\pi}{14} = \sin\frac{6\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14},$$

откуда

$$\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}.$$

Задача решена.

Задача 5. *Точка O — центр описанной окружности разностороннего треугольника ABC. Точка E симметрична основанию D биссектрисы AD относительно середины M стороны BC. Перпендикуляр к стороне BC в точке D пересекает прямую AO в точке X. Перпендикуляр к стороне BC в точке E пересекает прямую AD в точке Y. Докажите, что четырехугольник $BXCY$ — вписанный. (2012 IMO.)*



Обозначим пересечение продолжения биссектрисы AD с описанной окружностью исходного треугольника через P. Каждая из точек O и P равноудалена от точек B и C, поэтому прямая OP перпендикулярна BC и проходит через точку M. Пусть точка Z симметрична точке Y относительно прямой OP. Легко видеть, что

$$\angle XAP = \angle OPA = \angle EYP = \angle XZP.$$

Отсюда следует, что четырехугольник $XAZP$ вписанный. Тогда

$$DX \cdot DZ = DA \cdot DP = DB \cdot DC,$$

откуда следует, что четырехугольник $BXCZ$ вписанный. Но

$$\angle BYC = \angle BZC = \pi - \angle BXC,$$

откуда $BXCY$ вписанный, **что и требовалось доказать.**

Задача 6. *Король Горностаев выбрал два различных натуральных числа, не превосходящих 13. Король Ласок пишет на пергаменте пять множеств чисел, а затем Король Горностаев напротив каждого из них записывает, сколько в этом множестве задуманных им — ноль, одно или два. Докажите, что Король Ласок не сможет гарантированно определить оба загаданных Королем Горностаев числа. (Кубок памяти А.Н. Колмогорова)*

Решение. Поставим в соответствие каждому натуральному числу от 1 до 13 строчку из пяти нулей или единиц по следующему правилу: на k–м месте в строчке,

соответствующей числу n, стоит 0, если число n не принадлежит k–му из написанных Королем Ласок множеств, и 1, если принадлежит. Нам нужно доказать, что найдутся две пары строчек, покоординатные суммы которых совпадают. Действительно, в этом случае, получив такую сумму в качестве ответа, Король Ласок не сможет однозначно определить, какую из двух пар чисел, дающих такие суммы, загадал Король Горностаев.

Представим теперь все наши строчки, как разложения целых неотрицательных чисел в троичной системе счисления. Задача, таким образом, сводится к следующей: даны 13 целых неотрицательных чисел, троичная запись которых состоит не более, чем из пяти разрядов, каждый из которых равен 0 или 1. Нужно доказать, что в этом наборе найдутся две пары чисел, дающих одинаковые суммы. Это равносильно тому, что найдутся две пары чисел, дающих одинаковые разности (легко видеть, что никакие три числа такого вида не могут образовывать арифметическую прогрессию, так что накладывать условие, что пары не пересекаются, не обязательно).

Рассмотрим теперь множество S_n, состоящее из всех целых неотрицательных чисел, троичная запись которых состоит не более чем из n разрядов, каждый из которых равен 0 или 1. Заметим, что $S_{n+1} = S_n \cup (S_n + 3^n)$. Индукцией по n легко доказывается, что среди попарных разностей элементов множества S_n есть ровно 3^n различных целых чисел, и, следовательно, $\frac{3^n-1}{2}$ различных натуральных чисел: эти разности — в точности все числа от 1 до $\frac{3^n-1}{2}$.

Рассмотрим теперь интересующее нас множество S_5, и разделим его на следующие 4 подмножества: S_3, $S_3 + 27$, $S_3 + 81$ и $S_3 + 108$. В каждом из них попарные разности его элементов могут принимать значения от 1 до 13. Пусть в первое подмножество попало a выбранных чисел, во второе — b, в третье — c, и в четвертое — d. Тогда у нас получится

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2}$$

разностей, лежащих в промежутке от 1 до 13. Но

$$\frac{1}{2}\Big(a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)\Big) = \frac{1}{2}\Big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 13\Big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 - 13\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} \cdot 13^2 - 13\Big) > 13.$$

Значит, какие–то две разности совпадают, а выше было показано, что из этого следует утверждение задачи. **Задача решена.**