

Действие пятое. Выпуклые фигуры.

Явление второе. Теорема Хелли на плоскости

Теорема Хелли. *На плоскости дана система выпуклых множеств, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда все эти множества имеют общую точку.*

1. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать три, внутренности которых также покрывают всю плоскость.

2. Дано n точек, причем любые три из них можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все n точек можно покрыть кругом радиуса 1.

3. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

4. Докажите, что каждую фигуру F диаметра 1 можно заключить в квадрат со стороной 1.

5. Докажите, что наименьшая из содержащих произвольную выпуклую фигуру F окружностей содержит либо две точки F , являющиеся диаметрально противоположными, либо три точки F , являющиеся вершинами остроугольного треугольника.

6. *Теорема Юнга.* Докажите, что любая плоская фигура диаметра 1 может быть заключена в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. На плоскости даны несколько параллельных отрезков, причем для любых трех отрезков найдется пересекающая их прямая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.

8. Дана некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньшую трети окружности. Каждые две дуги этой системы имеют общую точку. Докажите, что все дуги этой системы имеют общую точку.

9. На плоскости даны несколько многоугольников, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все многоугольники.