Действие третье. Неравенство Йенсена.

Явление второе. Неравенство Караматы

Неравенство Караматы. *Пусть даны два упорядоченных набора действительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Пусть при всех k от 1 до n имеет место неравенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k$, причем при $k = n$ оно обращается в равенство. И пусть функция f выпукла вниз на некотором промежутке, содержащем оба рассматриваемых набора. Тогда*

$$f(a_1) + \ldots + f(a_n) \geq f(b_1) + \ldots + f(b_n).$$

1. Для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ докажите неравенство

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \ldots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

2. Для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ докажите неравенство

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

3. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

4. Для положительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z^2}} + \sqrt{\frac{yz}{x^2}} + \sqrt{\frac{zx}{y^2}}.$$

5. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

6. *Весовое неравенство Караматы.* Пусть даны два упорядоченных набора действительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Пусть при всех k от 1 до n имеет место неравенство $\varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2 + \ldots + \varphi_k a_k \geq \varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 + \ldots + \varphi_k b_k$, причем при $k = n$ оно обращается в равенство. (Здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — произвольные коэффициенты.) И пусть функция f выпукла вниз на некотором промежутке, содержащем оба рассматриваемых набора. Тогда

$$\varphi_1 f(a_1) + \ldots + \varphi_n f(a_n) \geq \varphi_1 f(b_1) + \ldots + \varphi_n f(b_n).$$