

IX Горностайская математическая олимпиада.

Устный Тур. 21 декабря 2017.

1. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы каждый бил не более одного другого?

2. Шестеро велосипедистов A , B , C , D , E и F двигаются с различными постоянными скоростями по прямой дороге. (Некоторые двигаются в одну сторону, некоторые — в другую.) Известно, что A встретил D и C одновременно, затем через некоторое время встретил F , а затем такое же время спустя встретил одновременно B и E . Через некоторое время после встречи с A и E велосипедист B встретил D , а затем такое же время спустя встретил одновременно C и F . А велосипедист C через некоторое время после встречи с A и D встретил E , а затем такое же время спустя встретил B и F . Докажите, что велосипедисты D , E и F также встретились одновременно.

3. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа, начиная с некоторого, а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел мог назвать Вася?

4. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Медиана AM пересекает отрезок EF в точке P . На меньшей дуге EF отметили произвольную точку X . Прямая XP вторично пересекает окружность в точке Y . Докажите, что $\angle XAY = \angle XYM$.

5. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных x и y

$$f(x + y) = f(x - y) + f(f(1 - xy)).$$

6. В обществе из n человек каждые два участника либо дружат, либо враждуют. Общее число пар друзей равно q . Также известно, что среди любых трех людей найдутся двое враждующих. Докажите, что существует член этого общества, среди врагов которого не более $q \cdot (1 - \frac{4q}{n^2})$ пар друзей.