

Х Горностайская математическая олимпиада.

Устный Тур. Решения задач.

1. Даны квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + ax + b$ и многочлен

$$Q(x) = P(x^5 + 2x - 1) + P(x^5 + 3x + 1).$$

Найдите все возможные пары значений параметров a и b , при которых каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ имеет ровно по одному корню. (Кубок памяти А.Н. Колмогорова)

Ответ: $a = 74$, $b = 37^2 = 1369$.

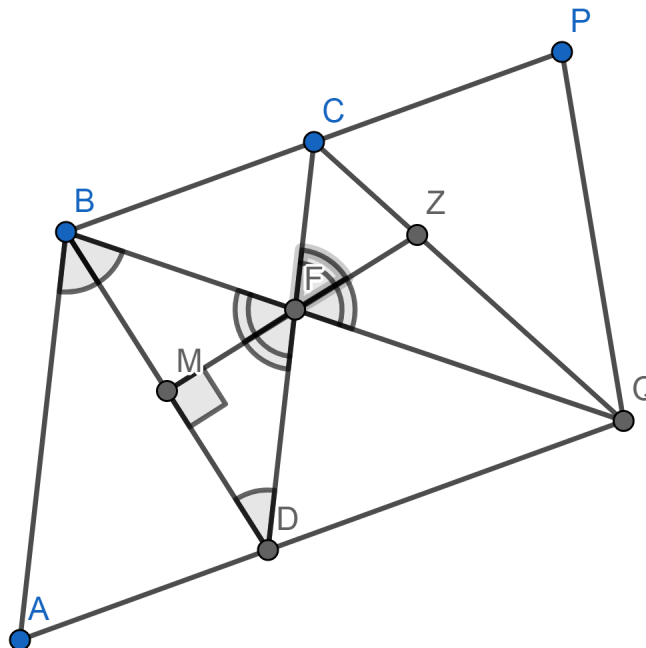
Решение. Пусть q — единственный корень многочлена $P(x)$. Тогда во всех остальных точках числовой прямой этот многочлен принимает строго положительные значения. Тогда $Q(x) = 0$ в том и только в том случае, когда $x^5 + 2x - 1 = x^5 + 3x + 1 = q$. Отсюда имеем $2x - 1 = 3x + 1$, т.е. $x = -2$. Тогда $q = -37$.

Поскольку у квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$ имеется единственный корень q , то $a^2 - 4b = 0$ и $q = -\frac{a}{2}$. Тогда $a = 74$, $b = 1369$. **Задача решена.**

2. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны BC за точку C отметили точку P такую, что $BC = CP$. На продолжении стороны AD за точку D отметили точку Q такую, что $\angle ABD = \angle DBQ$. Пусть Z — точка пересечения медиан треугольника BPQ . Оказалось, что $BZ = ZD$. Найдите отношение $AD : DQ$. (Д. Трущин)

Ответ: $AD : DQ = 1 : \sqrt{2}$.

Решение. Пусть прямая DC пересекает прямую BQ в точке F , и пусть M — середина BD . Легко видеть что $\angle FBM = \angle ABM = \angle MDF$, откуда $BF = FD$. Также по условию $BZ = ZD$. Значит точки F и Z лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BD . Тогда легко видеть, что FZ — биссектриса треугольника CFD .



Положим $AD = a$, $DQ = b$. Поскольку, BD — биссектриса треугольника ABQ , имеем $AB : BQ = AD : DQ = a : b$, откуда $AB = ka$, $BQ = kb$. По теореме Фалеса $BF : FQ = AD : DQ = a : b$. Тогда

$$BF = \frac{kab}{a+b}, FQ = \frac{kb^2}{a+b}.$$

Далее

$$CF = CD - DF = CD - BF = ka - \frac{kab}{a+b} = \frac{ka^2}{a+b}.$$

Поскольку FZ — биссектриса треугольника CFD , получаем

$$CF : FD = CZ : ZD = 1 : 2.$$

Но $CF : FD = \frac{ka^2}{a+b} : \frac{kb^2}{a+b} = a^2 : b^2$, откуда $a : b = 1 : \sqrt{2}$. **Искомое отношение найдено.**

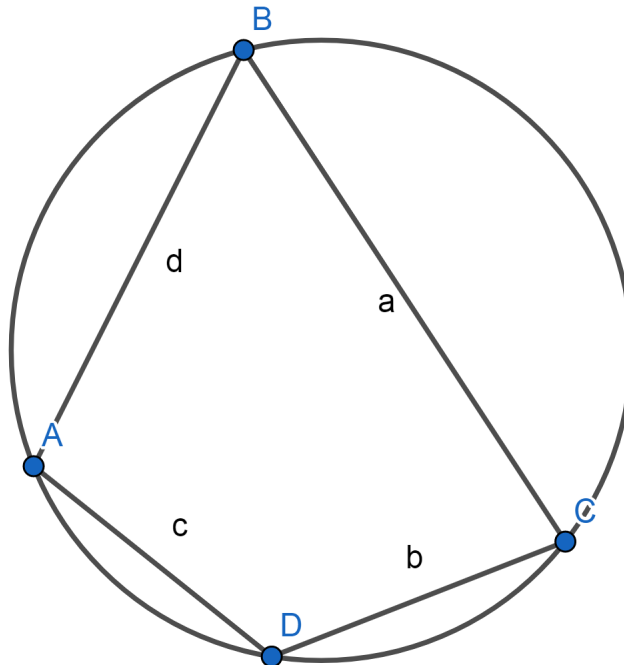
3. Даны положительные числа a , b , c и d такие, что

$$a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Найдите все возможные значения дроби $\frac{ab+cd}{ad+bc}$. (Baltic Way, 2014)

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами b и c , а также углом 120° между ними. По теореме косинусов третья его сторона равна $b^2 + c^2 + bc$. Также рассмотрим треугольник со сторонами a и d , а также углом 60° между ними. По теореме косинусов третья его сторона равна $a^2 + d^2 - ad$. Тогда по условию третьи стороны этих треугольников имеют равные длины.



Тогда, приставив сторону первого треугольника к равной стороне второго треугольника, получим четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle D = 120^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = d$, $BC = a$, $CD = b$, $DA = c$. Если $\angle C > 90^\circ$, то $\angle A < 90^\circ$. Но тогда $a^2 + b^2 < BD^2 < c^2 + d^2$, что противоречит условию. Аналогичное противоречие получается, когда $\angle C < 90^\circ$. Итак, $\angle C = \angle A = 90^\circ$.

Остается заметить, что

$$S_{ABCD} = S_{DAB} + S_{BCD} = \frac{1}{2}(ab + cd),$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2}ad \sin 60^\circ + \frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(ad + bc).$$

Тогда

$$\frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача решена.

4. Дан граф, в котором максимальный полный подграф имеет четное число вершин. Докажите, что вершины исходного графа можно так разбить на две части, что размеры наибольших полных подграфов в этих частях совпадают. (ИМО, 2007)

Решение. Для произвольного графа H через $d(H)$ обозначим размер максимального полного подграфа этого графа.

Обозначим данный граф через G и положим $d(G) = 2n$. Рассмотрим произвольный полный подграф из $2n$ вершин, обозначим его через X и назовем его вершины инициальными, а множество всех остальных вершин обозначим через Y . Давайте по одной перекидывать инициальные вершины из X в Y . Изначально $d(X) \geq d(Y)$. На каждом шаге $d(X)$ уменьшается на единицу, а $d(Y)$ увеличивается не более чем на единицу. Поэтому наступит либо такой момент, что $d(X) = d(Y)$, либо такой момент, что $d(X) = d(Y) - 1$. В первом случае мы победили, поэтому далее будем рассматривать второй случай.

Положим $k = d(X)$. Тогда в графе Y содержится $2n - k$ инициальных вершин. Пусть Q — подграф размера $k + 1$ графа Y . Если в подграфе $Y \setminus Q$ есть инициальная вершина, вернем ее обратно в X . Тогда $d(X) = k + 1 = d(Y)$, и мы победили. Значит, остается исследовать ситуацию, когда каждый подграф Q размера $k + 1$ содержит все $2n - k$ инициальных вершин.

Выберем в Y произвольный подграф Q размера $k + 1$. Выберем в Q произвольную неинициальную вершину и переместим ее в X . Предположим, после такого хода в графе X возникает полный подграф с $k + 1$ вершинами. Но тогда все вершины этого подграфа соединены с каждой из $2n - k$ инициальных вершин в Q , и вместе они образуют полный подграф с $2n + 1$ вершиной, что невозможно в силу выбора n . Значит величина $d(x)$ остается равной k . Нетрудно видеть, что такими действиями мы можем добиться того, что в Y не останется полных подграфов размера $k + 1$, т.е. рано или поздно придем к ситуации, когда $d(X) = d(Y) = k$. **Требуемое доказано.**

5. Кузнечик прыгает по отрезку $[0, 1]$. За один прыжок он может попасть из точки x либо в точку $\frac{x}{\sqrt{3}}$, либо в точку $\frac{x-1}{\sqrt{3}} + 1$. Изначально он находится в произвольной точке a отрезка. Докажите, что через некоторое количество прыжков он может оказаться в точке на расстоянии меньше $\frac{1}{2018}$ от точки a . (Московская Математическая олимпиада, 1999)

Решение. Пусть $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, $g(x) = 1 - \frac{1-x}{\sqrt{3}}$. Область значений f — отрезок $[0; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, область значений g — отрезок $[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 1]$. Каждый из этих отрезков имеет длину $\frac{1}{\sqrt{3}}$, и вместе они покрывают отрезок $[0; 1]$.

Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим всевозможные функции $h_1(h_2(\dots h_n(x) \dots))$, где каждая функция h_i — либо f , либо g . Легко видеть, что область значений каждой из этих функций есть отрезок длины $\frac{1}{\sqrt{3^n}}$. Докажем индукцией по n , что эти отрезки покрывают отрезок $[0; 1]$. Для $n = 1$ это утверждение уже проверено. Предположим, что области значений всевозможных функций $h_1(h_2(\dots h_{k-1}(x) \dots))$ покрывают отрезок $[0; 1]$. Фиксируем любую из функций $h_1(h_2(\dots h_{k-1}(x) \dots))$ и обозначим ее через $u(x)$. Область значений функции $u(x)$ покрывается областями значений функций $u(f(x))$ и $u(g(x))$. Тем самым утверждение доказано.

Пусть теперь на отрезке $[0; 1]$ выбрана точка a . Положим $\varepsilon = \frac{1}{2018}$, рассмотрим интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ и покажем, что кузнечик сможет в него попасть. Выберем n столь большим, чтобы было выполнено неравенство $\frac{1}{\sqrt{3^n}} < \varepsilon$. По доказанному, можно выбрать функцию $h_1(h_2(\dots h_n(x) \dots))$ такую, что точка a принадлежит области ее значений. Тогда вся область значений рассматриваемой функции (отрезок длины $\frac{1}{\sqrt{3^n}}$) лежит внутри интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Это означает, что из любой точки отрезка $[0; 1]$ кузнечик может попасть внутрь интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, **что и требовалось доказать.**

6. Даны положительное число r и последовательность вещественных чисел $a_0, a_1, a_2, \dots$. Для любых неотрицательных целых чисел m и s найдется натуральное число $n \in [m + 1, m + r]$ такое, что

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+s} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+s}.$$

Докажите, что данная последовательность является периодической. (ИМО, 2013)

Решение. Для любых индексов $m \leq n$ через $S(m, n)$ обозначим сумму

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1}.$$

Отметим, что $S(n, n) = 0$.

Лемма. Пусть $b_1, b_2, \dots$ — последовательность чисел. И пусть для каждого неотрицательного целого числа m существует целое число $n \in [m + 1; m + r]$ такое, что $b_m = b_n$. Тогда для любых индексов $k \leq l$ существует индекс $t \in [l; l + r - 1]$ такой, что $b_t = b_k$. Более того, среди членов последовательности (b_i) встречается не более r различных.

Доказательство леммы. Заметим, что существует бесконечная, начинающаяся с k , последовательность индексов $k_1 = k, k_2, \dots$ такая, что $b_{k_1} = b_{k_2} = \dots$, и что $k_i < k_{i+1} \leq k_i + r$. Тогда на каждом отрезке вида $[l; l + r - 1]$ найдется член этой последовательности. Тем самым, первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы от противного. Пусть $b_{i_1}, \dots, b_{i_{r+1}}$ — попарно различные члены данной последовательности. Будем поочередно в качестве k брать все числа $i_1, i_2, \dots, i_{r+1}$, а в качестве l будем брать наибольший из этих $r + 1$ индексов. Получаем, что для любого j от 1 до $r + 1$ найдется индекс $t_j \in [l, l + r - 1]$ такой, что $b_{t_j} = b_{i_j}$. Но тогда на отрезке $[l, l + r - 1]$ находится более r целых чисел, что невозможно. **Лемма доказана.**

Положим в условии задачи $s = 0$. Тогда последовательность (a_i) удовлетворяет условиям леммы, т.е. содержит не более r различных чисел. Обозначим через A_i набор чисел $(a_i, \dots, a_{i+r-1})$. Поскольку общее число таких наборов не превосходит r^r , то для любого $k \geq 0$ среди наборов $A_k, \dots, A_{k+r^r}$ найдутся два идентичных. Тогда существует натуральное число p такое, что равенство $A_d = A_{d+p}$ выполнено для бесконечно большого множества индексов d . Обозначим это множество через D .

Пусть $d + 1 \in D$. Положим $b_k = S(k, p + k)$. Легко видеть, что последовательность (b_i) удовлетворяет условию леммы, поэтому существует индекс $t \in [d + 1; d + r]$ такой, что $S(t, t + p) = S(d, d + p)$. Из этого следует, что $S(d, t) = S(d + p, t + p)$. Кроме того, поскольку, $A_{d+1} = A_{d+p+1}$, имеем $S(d + 1, t) = S(d + p + 1, t + p)$. Наконец, получаем

$$a_d = S(d, t) - S(d + 1, t) = S(d + p, t + p) - S(d + p + 1, t + p) = a_{d+p}.$$

Отсюда вытекает, что $A_d = A_{d+p}$, т.е. $d \in D$.

Итак множество D неограничено и для каждого элемента содержит на единицу меньший. Значит $D = \mathbb{N}$, т.е. для всех натуральных d имеет место равенство $a_d = a_{d+p}$. **Quod erat demonstrandum.**