Действие Шестое. Бесконечность.

Явление первое

1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две разноцветные точки на расстоянии 1 микрон.

2. Дана последовательность, в которой для любого n сумма n первых членов больше n. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много положительных членов.

3. Два зеркала образуют угол. Луч света падает на один из них. Докажите, что луч света рано или поздно перестанет отражаться от зеркал.

4. Можно ли покрыть прямую конечным числом кругов?

5.. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос (между параллельными прямыми)?

6. Есть несколько геометрических прогрессий, состоящих из натуральных чисел. Может ли случиться, что каждое натуральное число входит в одну из них?

7. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

8. В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдётся: а) точка, содержащаяся в бесконечном числе этих кругов; б) круг радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе этих кругов.

9. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении (поколения считаются от Адама по мужской линии) конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

10. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?

11. По клетчатой плоскости прыгает невидимая блоха. Каждую четную секунду она делает прыжок длины 1 по горизонтали или вертикали. Каждую нечетную секунду Левша строит прямолинейный бесконечный забор по одной из линий сетки, который блоха перепрыгнуть не сможет. Если блоха не может сделать очередной прыжок или забор проходит через нее, она становится видимой. Сможет ли Левша рано или поздно увидеть блоху?

12. В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,01 каждая. Длина прыжков блохи, прыгающей по прямой в одном и том же направлении, постоянна и равна корню из двух. Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму.

13. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, больших своего номера в этой последовательности.

14. Круг разделен на 2016 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.

15. Можно ли разбить бесконечную клетчатую доску на домино так, чтобы каждая линия сетки разрезала пополам лишь конечное число доминошек?