

Интермедия восьмая. На Реке.

1. Весной Река разлилась и затопила Заливные Луга. При этом a лугов затоплены полностью, b лугов — частично, а c лугов остались сухими. Сумма $a + b$ относится к сумме $b + c$, как $6 : 7$, а сумма $b + c$ к сумме $a + c$ — как $7 : 8$. Сколько лугов каждого вида имеется, если известно, что всего лугов 14?

2. Даны неотрицательные числа x , y и z . Докажите, что наименьшее из чисел $(x - y)^2$, $(y - z)^2$ и $(x - z)^2$ не превосходит $\frac{1}{5}(x^2 + y^2 + z^2)$.

3. Горностаи плыли на лодке от Плакучей Ивы по течению Реки 2 часа, после чего они устали грести и отдыхали 1 час (во время отдыха лодка плыла по течению реки). После этого они снова сели на весла и вернулись обратно к Плакучей Иве за 3 часа. Сколько времени потребовалось бы горностаям на возвращение, если бы они отдыхали 2 часа?

4. На доске записано натуральное число. За один ход Король Горностаев может прибавить к нему любое натуральное число, которое взаимно просто с ним, записать сумму на доску, после чего исходное число стереть. Король утверждает, что может ровно за две такие операции увеличить любое натуральное число на 7. Прав ли он?

5. На биссектрисе угла B треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что $AB = BE$ и $CB = BF$. Докажите, что $AF = CE$.

6. На доске 4×4 стоят несколько королей, которые бьют всю доску. Докажите, что можно оставить только четыре из них с тем же свойством.

7. В Тихой Заводи плавает 2013 кувшинок. Горноста́й и ласка по очереди связывают пары кувшинок стеблями. За один ход разрешается связывать кувшинки, которые еще не связаны между собой (при этом они могут быть связаны с другими кувшинками). Проигрывает игрок, после хода которого какая-то из кувшинок связана хотя бы с тремя другими. Начинает горноста́й. Кто выигрывает при правильной игре?

8. В Лодочном Клубе 10 жилых комнат, в каждой из которых живет по одному горноста́ю. Жители этих комнат просыпаются по очереди. Если дверь его комнаты на месте, то проснувшийся горноста́й снимают дверь какой-то другой из этих комнат и уносит ее на берег Реки. Если же дверь его комнаты унесена, то он забирает с берега любую дверь и вешает ее на место своей. Какое наибольшее количество дверей могло оказаться на Реке после того, как все проснулись?