

Интермедия первая. Золотые листья осени.

1. У Короля Горностаев есть 5 двусторонних кленовых листьев, на каждой стороне каждого листа написано по букве. Король может составить с помощью этих листьев слова КОШКА, МОШКА и МЫШКА. Обязательно ли он может составить слово КЫШКА?

2. У торговцев Пети и Васи было по 30 пирожков. Они начали продавать их по 30 рублей. Если у одного из них покупают пирожок, другой немедленно снижает цену на свои пирожки на один рубль (пирожки продаются только по одному, и такого, чтобы они продавали по пирожку одновременно, не бывает). Сколько денег выручат в сумме Петя и Вася, когда продадут все свои пирожки? (Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Касательные к ω в вершинах A и C пересекаются в точке P , не лежащей на прямой BD . Оказалось, что $PA^2 = PB \cdot PD$. Докажите, что прямые AB и CD не параллельны.

4. По кругу расставлено 2018 вещественных чисел. Докажите, что найдутся такие три последовательно расположенных числа a , b и c , что $4ab - 4c^4 \leq 1$.

5. Натуральные числа a и b таковы, что $a > b > 1$, число $ab + 2$ делится на $a + b$, а число $ab - 2$ делится на $a - b$. Докажите, что $a < \sqrt{2}b$.

6. Окружность S описана около остроугольного треугольника ABC . Точка D — середина меньшей дуги BC этой окружности. Окружность Ω касается S в точке D , а также касается стороны BC . На луче AB отложена точка P таким образом, что длина отрезка AP равна длине касательной из точки A к Ω . Докажите, что угол APD — прямой.

7. Найдите наибольшее α , для которого при любом натуральном n верно следующее утверждение: «Пусть в квадрате $n \times n$ закрашено меньше, чем αn^2 клеток, и никакие четыре из них не образуют квадратик 2×2 . Тогда можно закрасить еще одну клетку так, чтобы такого квадратика не появилось.»