МММФ МГУ. ТЛ «Дважды Два». Школа 25. Горностайский математический кружок.

VI Горностайская Математическая Олимпиада.

Письменный Тур. Решения.

Задача 1. *При каком наибольшем k на шахматную доску можно поставить k ладей и k коней так, чтобы они не били друг друга? (Д. Трущин)*

Ответ: При $k = 5$.

Решение. Предположим, нам удалось расставить фигуры требуемым образом при $k \geq 6$. Заметим, что кони могут стоять только в тех строках и тех столбцах, в которых нет ладей. Но у нас не более двух таких строк и не более двух таких столбцов, причем на их пересечении находится не более четырех клеток. Тогда в этих четырех клетках стоит в общей сложности не менее шести коней, чего быть не может. Значит, $k \leq 5$. Остается привести пример для $k = 5$.

л							
	л						
		л					
			л				
				л			
					к		к
						к	
					к		к

Задача 2. *Горностай и ласка по очереди называют числа. Первым ходом горностай называет 1 или 2, вторым ходом ласка называет 2 или 3, третьим ходом горностай называет 3 или 4 и т.д. Наконец, последним ходом горностай называет 2017 или 2018. Если сумма всех названных чисел кратна 3, побеждает горностай, а иначе — ласка. Кто из игроков выиграет при правильной игре? (Национальная олимпиада Перу, 2011)*

Ответ: ласка.

Решение. Каждым своим ходом горностай выбирает между числами $2x - 1$ и $2x$, а ласка следующим ходом выбирает между числами $2x$ и $2x + 1$. Пусть ласка каждый раз на ход $2x - 1$ отвечает ходом $2x + 1$, а на ход $2x$ отвечает ходом $2x$. Тогда за каждую пару ходов звери увеличивают сумму в общей сложности на $4x$. После 1008 пар ходов сумма всех чисел будет равна $4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 1008) = 2 \cdot 1008 \cdot 1009$, т.е. будет кратна 3. Тогда последним ходом горностай вынужден добавить к сумме число, не делящееся на три, после чего он проигрывает.

Задача 3. *Вася и Даша очень любят печь пироги. Каждое воскресение каждый из них устраивает вечеринку, для которой печет трехкилограммовый пирог и делит его поровну между своими гостями. Вечеринки быстро стали очень популярными. На первую Васину вечеринку пришло два человека, а на каждую последующую приходило в два раза больше людей, чем на предыдущую. На первую Дашину вечеринку пришло три человека, а на каждую последующую приходило в три раза больше людей, чем на предыдущую. Через некоторое время Дима с Милой заметили, что в общей сложности за время вечеринок они съели одинаковое количество пирога. Докажите, что Мила была на тех и только тех вечеринках, на которых был Дима. (Д. Анзон)*

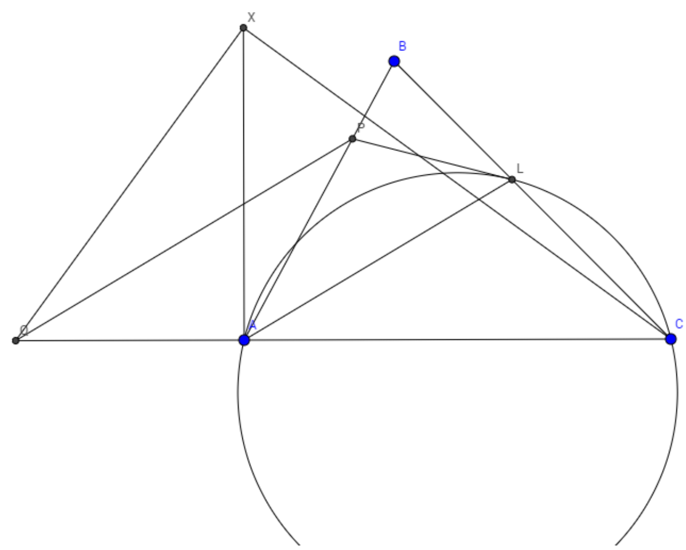
Решение. Назовем вечеринку печальной, если на ней был Дима, но не была Мила, а также если на ней была Мила, но не был Дима. Предположим, печальные вечеринки существуют. Заметим, что за те вечеринки, на которых Дима и Мила побывали вместе, они съели поровну пирога. Тогда из условия следует, что за печальные вечеринки они также съели поровну пирога.

Пусть M — номер последней печальной васиной вечеринки. Без ограничения общности рассуждения будем считать, что на этой вечеринке побывал Дима. Пусть также N — номер последней печальной дашиной вечеринки. Назовем $\frac{1}{2^M \cdot 3^N}$ часть пирога кусочком. Заметим, что на васиной вечеринке номер P каждый гость съедает $2^{M-P} \cdot 3^N$ кусочков, а на дашиной вечеринке номер Q каждый гость съедает $2^M \cdot 3^{N-Q}$ кусочков. Тогда каждый гость съедал четное число кусочков на каждой печальной вечеринке, кроме последней васиной. Но это означает, что Дима съел нечетное число кусочков, а Мила — четное. Противоречие. Значит, печальных вечеринок не существует, откуда немедленно вытекает требуемое.

Задача 4. *В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Касательная в точке L к описанной окружности треугольника ACL пересекает сторону AB в точке P. Прямая, проходящая через P паралельно AL, пересекает прямую AC в точке Q. На луче, выходящем из точки A перпендикулярно QC, отложили отрезок AX, равный AL. Найдите угол CXQ. (Д. Трущин)*

Ответ: 90^o.

Решение.



Положим $AC = a$, $AL = b$, $AP = p$.

Заметим, что $\angle LCA = \angle PLA$ по теореме об угле между касательной и хордой. Тогда треугольники ALC и APL подобны по двум углам, откуда $\frac{b}{a} = \frac{p}{b}$, т.е. $b = \sqrt{ap}$. Поскольку $PQ||AL$, $\angle PQA = \angle LAC = \angle PAL = \angle APQ$, откуда следует, что $QA = AP = p$. Тогда $QX^2 = AX^2 + AQ^2 = b^2 + p^2 = ap + p^2$. По аналогии с этим $CX^2 = CA^2 + XA^2 = a^2 + b^2 = a^2 + pa$. Тогда $QX^2 + CX^2 = a^2 + 2ap + p^2 = (a+p)^2 = QC^2$, откуда по обратной теореме Пифагора следует, что искомый угол прямой

Комментарий. Как известно, высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна среднему геометрическому отрезков, на которые она гипотенузу делит. Обратное тоже верно: если в треугольнике высота равна среднему геометрическому отрезков, на которые она делит сторону, то этот треугольнки прямоугольный. По сути мы доказали этот факт внутри нашего решения.

Задача 5. *Можно ли в клетки таблицы 9×9 записать натуральные числа от 1 до 81 так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была одна и та же? (С. Токарев)*

Ответ: можно.

Решение. Заполним таблицу числами следующим образом:

1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
3	1	2	3	1	2	3	1	2
6	4	5	6	4	5	6	4	5
9	7	8	9	7	8	9	7	8
2	3	1	2	3	1	2	3	1
5	6	4	5	6	4	5	6	4
8	9	7	8	9	7	8	9	7

Заметим, что одинаковые цифры в этой таблице отстоят друг от друга на $3m$ клеток по вертикали и на $3p + m$ по горизонтали.

Повернем эту таблицу на 90^o по часовой стрелке. Теперь одинаковые цифры отстоят друг от друга на $3n$ клеток по горизонтали и на $3q - n$ по вертикали.

Теперь в каждой клетке запишем две цифры: ту, которая стояла там исходно, и ту, которая оказалась там после поворота. Предположим, какая–то упорядоченная пара цифр появляется в полученной таблице дважды. Тогда содержащие ее клетки отстоят на $3m = 3q - n$ клеток по вертикали и на $3n = 3p + m$ клеток по горизонтали. Отсюда следует, что каждое из чисел m и n делится на 3. Но по смыслу задачи, эти числа меньше трех, откуда следует, что $m = n = 0$, а тогда $p = q = 0$, т.е. рассмотренные клетки совпадают.

Значит, каждая пара чисел встречается в полученной таблице лишь однажды. Теперь заменим каждую пару (a, b) на число $9a + b - 9$. Легко видеть, что разные пары превращаются в разные числа, т.е. все числа в полученной таблице разные. При этом каждое из них не меньше $9 \cdot 1 + 1 - 9 = 1$ и не больше $9 \cdot 9 + 9 - 9 = 81$, т.е. в таблице каждое из чисел от 1 до 81 записано ровно по одному разу. Сумма чисел в каждом квадрате 3×3 и в исходной, и в повернутой таблице равна $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Тогда в итоговой таблице сумма чисел в каждом квадрате 3×3 равна $9 \cdot 45 + 45 - 9 \cdot 9 = 369$. Значит, итоговая таблица удовлетворяет условию задачи.

Задача 6. *Из промежутка $(2^{2n}, 2^{3n})$ выбрано $2^{2n-1}+1$ нечетное число. Докажите, что среди выбранных чисел есть два, квадрат каждого из которых не делится на другое. (С. Берлов)*

Решение. Нечетные числа имеют 2^{2n-1} возможных остатков от деления на 2^{2n}, поэтому среди выбранных чисел найдутся числа a и b, имеющие одинаковые остатки. Докажем, что они — искомые.

Предположим, что a^2 делится на b. Тогда и $a^2 - 2ab + b^2$ делится на b, т.е. $(a - b)^2$ делится на b. Пусть $a = p \cdot 2^{2n} + r$, и $b = q \cdot 2^{2n} + r$. Тогда $(p - q)^2 \cdot 2^{4n}$ делится на b. Но поскольку b — нечетное, отсюда следует, что $(p - q)^2$ делится на b. Тогда $(p - q)^2 \geq b > 2^{2n}$, т.е. $|p - q| > 2^n$. Отсюда следует, что большее из чисел p и q больше 2^n, а тогда большее из чисел a и b больше $2^n \cdot 2^{2n} = 2^{3n}$, что противоречит условию.

Значит, a^2 не делится на b. Аналогично b^2 не делится на a. **Требуемое доказано.**