

Интермедия девятая. Теплое дыхание лета.

1. Назовем натуральное число хорошим, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

2. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигур из k клеток. Докажите, что его можно разрезать на k одинаковых фигур из n клеток.

3. Дана функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, выполняется неравенство $f^2(x) \leq f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в отрезке $[0, 1]$.

4. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k + 1$?

5. В Королевском Сейфе n ячеек с номерами от 1 до n . В каждой ячейке первоначально лежала карточка с ее номером. Агент 00X переложил карточки в некотором порядке так, что в i -й ячейке оказалась карточка с числом a_i . Барсук может менять местами любые две карточки с номерами x и y , платя за это $2|x - y|$ рублей. Докажите, что Барсук может вернуть все карточки на исходные места, заплатив при этом не более $\sum |a_i - i|$ рублей.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH . На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что прямые QM и AC перпендикулярны, а также прямые PM и AB перпендикулярны. Окружность, описанная около треугольника PMQ пересекает прямую BC вторично в точке X . Докажите, что $BH = CX$.

7. Треугольник ABC , в котором $AB > BC$, вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр внеписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .

8. У Короля Горностаев есть 100 одинаковых по внешнему виду старинных монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых — разные, причем любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах Король Горностаев сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?