

## Интермедия третья. Жизнь продолжается

1. Король Горностаев выдал каждому из своих министров квадратный трехчлен, а потом написал на доске 4 числа и велел каждому из министров подставить эти четыре числа в его трехчлен. У Первого Министра получились числа 2, 3, 5 и 8. У Второго Министра получились числа 16, 15, 13 и  $n$ . Чему может быть равно  $n$ ?

2. У каждого натурального числа от  $n+1$  до  $n+1000$  выписывают все делители, не превосходящие 1000. Докажите, что для бесконечно многих натуральных  $n$  сумма всех выписанных чисел окажется больше миллиона, и для бесконечно многих — меньше.

3. Точка  $O$  — центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  с углом  $B$ , равным  $30^\circ$ . Луч  $BO$  пересекает  $AC$  в точке  $K$ . Точка  $L$  — середина дуги  $OC$  описанной окружности треугольника  $KOC$ , не содержащей точку  $K$ . Докажите, что точки  $A, B, L$  и  $K$  лежат на одной окружности.

4. На опушке Дремучего Леса живут  $2 \cdot 10^6$  кроликов, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 зверей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что найдутся четверо попарно знакомых друг с другом кроликов.

5. Назовем число  $x$  далеким от квадратов и кубов, если для каждого целого числа  $k$  выполняются неравенства  $|x - k^2| > 10^6$  и  $|x - k^3| > 10^6$ . Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел  $n$ , что число  $2^n$  далеко от квадратов и кубов.

6. Тронный зал в Замке Горностаев украшен гирляндой из  $n$  лампочек. Вначале некоторые из них включены, а некоторые нет. Глаувный Церемонимейстер может взять любую горящую лампочку и погасить ее. При этом состояния двух соседних с ней лампочек автоматически меняются (горящие гаснут, негорящие включаются). При каких  $n$  Церемонимейстер может включить все лампочки независимо от их начального состояния?

7. На диагонали  $AC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  нашлась точка  $P$ , лежащая внутри треугольника  $ABD$ , для которой

$$\angle ACD + \angle BDP = \angle ACB + \angle DBP = 90^\circ - \angle BAD.$$

Докажите, что либо  $\angle BAD + \angle BCD = 90^\circ$ , либо  $\angle BDA + \angle CAB = 90^\circ$ .