

Неравенства

Задача 1. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$.

Задача 2. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите $ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

Задача 3. Для вещественных чисел a, b, c покажите, что $\frac{3}{2}(a^4 + b^4 + c^4) + 24 \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$

Задача 4. Покажите, что для любых положительных вещественных чисел a, b, c таких, что $a \geq b \geq c$ верно, что

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+c}} \geq \frac{a}{\sqrt{a+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+a}} + \frac{c}{\sqrt{c+b}}.$$

Задача 5. По кругу стоят вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$. Коля посчитал квадраты всех этих чисел и сложил их. Вася написал вместо каждого числа полусумму его соседей. Потом посчитал квадраты получившихся чисел и сложил их. Покажите, что число Коли больше или равно числу Васи.

Задача 6. Пусть $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ — неубывающие последовательности вещественных чисел. Покажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}, \\ \text{б) } & \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}. \end{aligned}$$

Задача 7. Докажите, что для всех положительных x и y

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

Задача 8. Для положительных чисел a, b, c известно, что $abc > a + b + c$. Покажите, что $a + b + c > 3\sqrt{3}$.

Неравенства

Задача 1. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$.

Задача 2. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите $ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

Задача 3. Для вещественных чисел a, b, c покажите, что $\frac{3}{2}(a^4 + b^4 + c^4) + 24 \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$

Задача 4. Покажите, что для любых положительных вещественных чисел a, b, c таких, что $a \geq b \geq c$ верно, что

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+c}} \geq \frac{a}{\sqrt{a+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+a}} + \frac{c}{\sqrt{c+b}}.$$

Задача 5. По кругу стоят вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$. Коля посчитал квадраты всех этих чисел и сложил их. Вася написал вместо каждого числа полусумму его соседей. Потом посчитал квадраты получившихся чисел и сложил их. Покажите, что число Коли больше или равно числу Васи.

Задача 6. Пусть $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ — неубывающие последовательности вещественных чисел. Покажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}, \\ \text{б) } & \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}. \end{aligned}$$

Задача 7. Докажите, что для всех положительных x и y

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

Задача 8. Для положительных чисел a, b, c известно, что $abc > a + b + c$. Покажите, что $a + b + c > 3\sqrt{3}$.