

VI Горностайская Математическая Олимпиада.

Заочный Тур. Решения.

Задача 1. *Вася и Петя бегают по круговой дорожке, причем Вася бежит по часовой стрелке, а Петя — против. Если Вася увеличит свою скорость в три раза, мальчики начнут встречаться в полтора раза чаще. Во сколько раз чаще они станут встречаться, если свою скорость увеличит в три раза Петя? (Д. Трущин)*

Ответ: в 2,5 раза.

Решение. Обозначим скорость Васи через x , а скорость Пети — через y . Заметим, что условие о том, что мальчики стали встречаться в полтора раза чаще, означает, что их суммарная скорость возросла в полтора раза, т.е. $3x + y = 1,5(x + y)$. Отсюда получаем, что $y = 3x$.

Если Петя увеличит свою скорость в три раза, суммарная скорость ребят увеличится в $\frac{x+3y}{x+y} = \frac{10x}{4x} = 2,5$ раза, т.е. они станут встречаться в 2,5 раза чаще.

Задача 2. *В каждую клетку квадратной таблицы 111×111 поместили стрелочку, указывающую на одну из соседних по стороне клеток. Докажите, что на какую-то из клеток не указывает ни одной стрелочки. (Фольклор.)*

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Заметим, что стрелки из белых клеток указывают на черные клетки, а стрелки из черных клеток — на белые.

Поскольку площадь доски нечетна, белых и черных клеток при этом не поровну. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что черных клеток больше. Тогда число стрелок, указывающих на черные клетки меньше, чем число черных клеток. Значит, на какую-то из них не указывает ни одной стрелки.

Задача 3. *В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5. (Кубок памяти А.Н.Колмогорова.)*

Решение. Допустим, в данном графе есть цикл длины 5. Покрасим вершины этого цикла в красный цвет, а остальные 95 вершин — в синий. Назовем ребро правильным, если у него разноцветные концы.

Заметим, что ни одна из вершин графа не может быть соединена с тремя или более красными, поскольку тогда какие-то из этих трех вершин являются соседними в нашем цикле, т.е. в графе есть треугольник, что противоречит условию. Тогда из каждой синей вершины выходит не более двух правильных ребер, откуда следует, что число правильных ребер не превосходит $2 \cdot 95 = 190$. С другой стороны, каждая красная вершина соединена по меньшей степени с 39 синими (т.к. у нее по меньшей мере 41 сосед, из которых только два красных). Тогда число правильных ребер не менее $39 \cdot 5 = 195$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Задача 4. *В треугольнике ABC с углом B , равным 60° , провели биссектрисы AP , BQ и CR . На продолжении биссектрисы BQ за точку Q отметили точку O такую, что $\angle ACO = \angle BRP$. Найдите угол AOC . (Д. Трущин)*

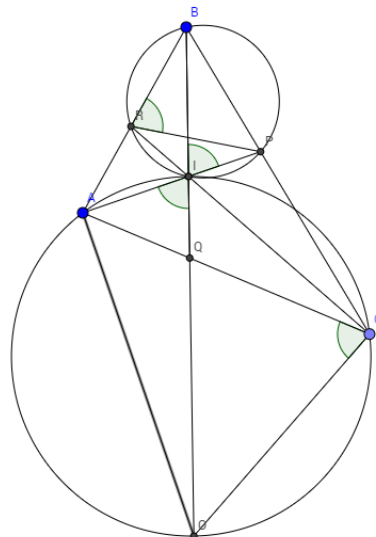
Ответ: $\angle AOC = 60^\circ$.

Решение. Заметим, что $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$. Отсюда следует, что

$$\angle AIC = 180^\circ - (\angle IAC + \angle ICA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 120^\circ.$$

Тогда $\angle RIP + \angle RBP = 180^\circ$, откуда следует, что четырехугольник $RBPI$ вписанный. Тогда $\angle ACO = \angle BRP = \angle BIP = \angle AIO$, откуда получаем, что четырехугольник

$AICO$ также вписанный.



Тогда $\angle AOC = 180^\circ - \angle AIC = 60^\circ$.

Задача 5. Клетку квадрата 11×11 назовем хорошей, если после ее удаления оставшуюся часть можно разрезать на прямоугольники 1×4 . Сколько существует хороших клеток? (Д. Трущин)

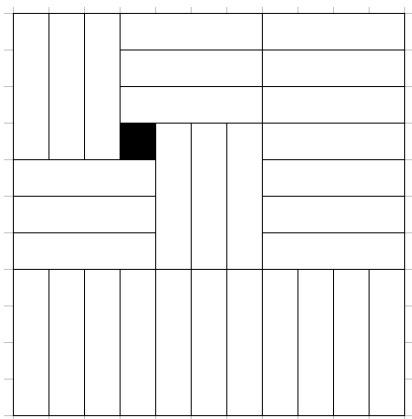
Ответ: 4.

Решение. Расставим в таблице числа следующим образом:

1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1		1	1	1		1	1	1
			3				3			
1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1		1	1	1		1	1	1
			3				3			
1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1		1	1	1		1	1	1
1	1	1		1	1	1		1	1	1

Заметим, что сумма чисел в каждом прямоугольнике 1×4 равна 3. Тогда после удаления хорошей клетки сумма чисел в оставшихся будет равна $30 \cdot 3 = 90$. При этом общая сумма чисел в таблице равна $9 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 93$. Значит, в удаленной клетке могла стоять только тройка. Таким образом, ни одна из клеток, кроме четырех, содержащих тройки, хорошей быть не может.

Отметим, что четыре указанные клетки действительно являются хорошими. Для каждой из них соответствующий пример разрезания может быть получен из приведенного поворотами:



Задача 6. Через $\tau(n)$ обозначим количество натуральных делителей числа n . Решите в натуральных числах уравнение

$$n = 56\tau(n).$$

(Д. Трущин)

Ответ: $n_1 = 896$, $n_2 = 2016$.

Решение. Из условия следует, что n делится на 2 и на 7. Разложим n на простые множители:

$$n = 7^s \cdot 2^t \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Поскольку n делится на 56, $s \geq 1$, $t \geq 3$.

Заметим, что

$$\tau(n) = (s+1)(t+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k+1).$$

В самом деле, для того, чтобы составить делитель числа n необходимо¹ для каждого простого множителя p_i из разложения подобрать степень, не превосходящую α_i .

Тогда

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{p^{\alpha_1}}{\alpha_1+1} \cdot \frac{p^{\alpha_2}}{\alpha_2+1} \cdot \dots \cdot \frac{p^{\alpha_k}}{\alpha_k+1} = 56. \quad (1)$$

Дробь вида $\frac{p^m}{m+1}$, где m — натуральное число, а p — простое, назовем допустимой. Легко видеть, что допустимая дробь растет с ростом m (так как при увеличении m на единицу числитель возрастает в p раз, а знаменатель — менее чем в два раза). Отсюда следует, что каждая допустимая дробь, кроме $\frac{2^1}{1+1}$, строго больше единицы.

Заметим, что произведение любого набора дробей в левой части (1) не превосходит 56, т.к. иначе все выражение более 56. Также, если в знаменатель какой-либо из этих дробей делится на некоторое простое число, то это число должно входить в разложение n на простые множители, иначе при сокращении дробей в (1) получится нецелое число.

Если $t = 3$, то $\frac{2^t}{t+1} = 2$, откуда следует, что левая часть выражения (1) не делится на 4, чего не может быть. Значит, $t \geq 4$.

Если $s \geq 3$, то $\frac{7^s}{s+1} \geq \frac{343}{4} > 56$. Если $s = 2$, то знаменатель дроби $\frac{7^s}{s+1}$ равен 3, т.е. 3 входит в разложение n в некоторой степени r . Но

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{3^r}{r+1} \geq \frac{49}{3} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{2} > 56.$$

Значит, $s = 1$.

Если $t = 4$, то знаменатель дроби $\frac{2^t}{t+1}$ равен 5, т.е. 5 входит в разложение n в некоторой степени q . Если $q \geq 2$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{5^q}{q+1} \geq \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{25}{3} > 56.$$

Если $q = 1$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{5^q}{q+1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{2} = 28.$$

Но тогда левая часть (1) не делится на 8, чего также не может быть. Значит, $t \geq 5$.

Если $t = 5$, то знаменатель дроби $\frac{2^t}{t+1}$ делится на 3, т.е. 3 входит в разложение n в некоторой степени r . Если $r \geq 3$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{3^r}{r+1} \geq \frac{7}{2} \cdot \frac{32}{6} \cdot \frac{27}{4} > 56.$$

¹См. также задачу 4 Заочного Тура IV Горностайской Олимпиады.

Если $r = 2$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{3^r}{r+1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{32}{6} \cdot \frac{9}{3} = 56.$$

В этом случае в разложении n не может быть других простых делителей (иначе левая часть (1) окажется больше 56), т.е. $n = 7 \cdot 2^5 \cdot 3^2 = 2016$. Если $r = 1$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \cdot \frac{3^r}{r+1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{32}{6} \cdot \frac{3}{2} = 28,$$

т.е. левая часть (1) не делится на 8, что нас не устраивает.

Если $t = 6$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{64}{7} = 32,$$

т.е. левая часть (1) не делится на 7, чего не может быть.

Если $t = 7$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{128}{8} = 56.$$

В этом случае в разложении n не может быть других простых делителей (иначе левая часть (1) окажется больше 56), т.е. $n = 7 \cdot 2^7 = 896$.

Если $t \geq 8$, то

$$\frac{7^s}{s+1} \cdot \frac{2^t}{t+1} \geq \frac{7}{2} \cdot \frac{256}{9} > 56.$$

Итак, перебрав все возможности, мы обнаружили два подходящих значения n и доказали, что других нет. **Задача решена.**