

Интермедия десятая.

Жаркие дни в Дремучем Лесу.

1. В бесконечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ натуральных чисел $\text{НОД}(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ при всех натуральных i . Докажите, что $a_n \geq 2^n$ при всех натуральных n .

2. Найдите все натуральные числа m , для которых существует ровно 119 упорядоченных пар (x, y) , где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$ таких, что оба числа $x + my$ и $y + mx$ — целые.

3. На Скипетре Короля Горностаев есть 2015 рубинов. При нажатии на каждый из рубинов одно из 2015 окон Горностайского Замка освещается или гаснет (разные камни соответствуют разным окнам). За один ход Король может одновременно нажать на любое число камней. Разведывательное агенство ласок тайно пристально наблюдает за Королем и за замком. Какое наибольшее число различных ходов Король может сделать, прежде чем ласки для каждого окна определят, какой рубин ему соответствует. (Дважды использовать один и тот же набор камней Король не может!)

4. Сумма S шести натуральных чисел a, b, c, d, e и f является делителем чисел $abc + def$ и $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Докажите, что S — составное число.

5. У горностая и ласки есть куча из 1998 монет. Каждый из них может выбрать несколько куч (может быть, одну) и разделить каждую из выбранных куч на две меньших (пытаться делить кучу из одной монеты нельзя). Они делают это по очереди, начинает ласка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре?

6. На стороне AC треугольника ABC с углом B , который равен 60° , выбрана точка M такая, что $\angle BCA = 2\angle MBC$, а на стороне AB — точка D такая, что $BD = MC$. Найдите угол DMB .

7. На плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Они разбили плоскость на конечные и бесконечные части. Каждую конечную часть покрасили в красный или зеленый цвет. За ход можно перекрасить все части внутри треугольника, образованного некоторыми тремя прямыми. Докажите, что такими операциями все части можно сделать красными.

8. На одной стороне тупого угла с вершиной O взяты точки A, B и C , а на другой — точки R, S и T так, что $OA > OB > OC$ и $OR > OS > OT$. Докажите, что

$$AR + 2CT < BR + CS + AT.$$